第 4 节 向量的坐标运算与建系运用（★★★）

内容提要

本节归纳与平面向量坐标运算有关的题型.

1．坐标运算规则

①加减法：设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)$；

②数乘：设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，$\lambda\in\mathbf{R}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y)$；

③两点连线向量坐标：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$；

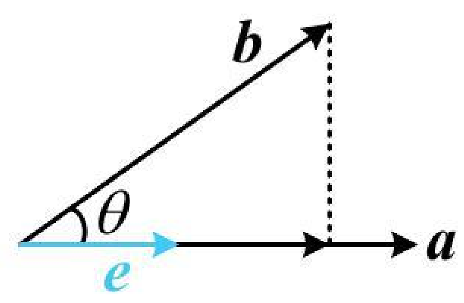
④数量积：设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$；

⑤模：设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$；

⑥向量共线坐标公式：设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1$；

⑦投影向量计算公式：如图，$\boldsymbol{e}$ 为与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，则 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)\boldsymbol{e}$，由于 $\boldsymbol{e}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，

所以 $(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)\boldsymbol{e}=(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{|\boldsymbol{b}|\cos\theta}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$.



2．向量几何问题中的建系方法：在一些几何图形中研究向量问题，若用几何的方法来求解不易，可考虑建系，用向量的坐标运算来解决问题.

3．向量代数问题中的建系方法：有时题干直接给出几个向量的模、夹角、数量积等条件，没有图形，我们也可以考虑把这些向量放到坐标系下，设出它们的坐标，用向量的坐标运算来解决问题.

典型例题

类型Ⅰ：向量的坐标运算

【例 1】已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(-k,2)$，若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/k\boldsymbol{a}$，则实数 $k(k\neq 0)$的值为（　　）

（A）$-\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$-\dfrac{3}{2}$　　（D）$\dfrac{3}{2}$

解析：有坐标，翻译向量平行用 $x_1y_2=x_2y_1$，由题意，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3-k,6)$，$k\boldsymbol{a}=(3k,4k)$，

因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/k\boldsymbol{a}$，所以 $(3-k)\cdot 4k=3k\cdot 6$，解得：$k=-\dfrac{3}{2}$ 或 0，又 $k\neq 0$，所以 $k=-\dfrac{3}{2}$.

答案：C

【例 2】（2022・新高考Ⅱ卷）已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$，若 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>=<\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}>$，则实数 $t=$（　　）

（A）-6　　（B）-5　　（C）5　　（D）6

解析：涉及向量的夹角，考虑夹角余弦公式，由题意，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}=(3+t,4)$，因为 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>=<\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}>$，

所以$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>=\cos<\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}>$，从而$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|}$，故$\dfrac{3(3+t)+16}{5|\boldsymbol{c}|}=\dfrac{3+t}{|\boldsymbol{c}|}$，

所以$\dfrac{3(3+t)+16}{5}=3+t$，解得：$t=5$.

答案：C

【例 3】已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$，$\boldsymbol{b}=(-3,4)$，则$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为（　　）

（A）$(-6,8)$　　（B）$(6,-8)$　　（C）$(-\dfrac{6}{5},\dfrac{8}{5})$　　（D）$(\dfrac{6}{5},-\dfrac{8}{5})$

解析：算投影向量，可代内容提要 1 中的公式⑦，

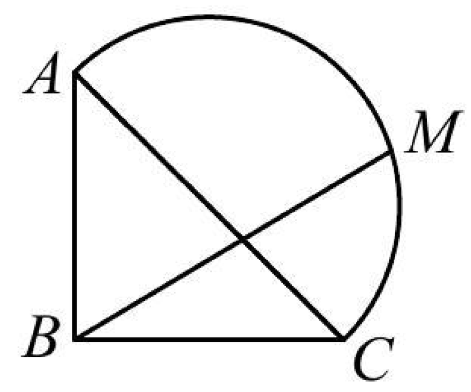
由题意，$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}=\dfrac{10}{(-3)^2+4^2}(-3,4)=(-\dfrac{6}{5},\dfrac{8}{5})$.

答案：C

类型Ⅱ：向量几何问题中的建系方法

【例 4】如图，在ΔABC中，$\angle ABC=90^{\circ}$，$AB=BC=1$，以AC为直径的半圆上有一点M，$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BC}+\sqrt{3}\lambda\overrightarrow{BA}$，则$\lambda=$（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（D）$\sqrt{3}$



解析：用几何方法分析不易，图形比较特殊，可考虑建系，用向量的坐标运算来解决问题，

建立如图所示的平面直角坐标系，则$B(0,0)$，$A(0,1)$，$C(1,0)$，AC中点为$N(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，$|AC|=\sqrt{2}$，

所以图中半圆的方程为$(x-\dfrac{1}{2})^2+(y-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{2}$ ①，

要求λ，可由$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BC}+\sqrt{3}\lambda\overrightarrow{BA}$将$M$的坐标用$\lambda$表示，代入①建立关于$\lambda$的方程求解，

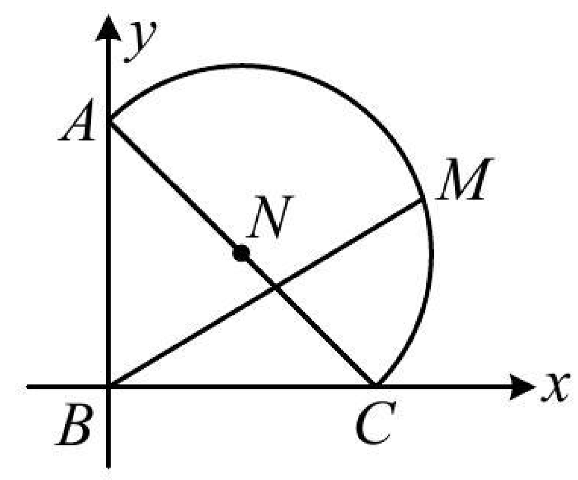
设$M(x,y)$，则M的坐标满足方程①，且$\overrightarrow{BM}=(x,y)$，而$\lambda\overrightarrow{BC}+\sqrt{3}\lambda\overrightarrow{BA}=\lambda(1,0)+\sqrt{3}\lambda(0,1)=(\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，

因为$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BC}+\sqrt{3}\lambda\overrightarrow{BA}$，所以$\begin{cases}x=\lambda\\y=\sqrt{3}\lambda\end{cases}$，

代入①可得$(\lambda-\dfrac{1}{2})^2+(\sqrt{3}\lambda-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{2}$，解得：$\lambda=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$或 0，

当$\lambda=0$时，M与B重合，不在所给的半圆上，所以$\lambda=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$.

答案：A



【反思】遇到特殊图形（如直角三角形，等腰、等边三角形，平行四边形，圆等），建系可将思维量较大的几何问题转化为流程化处理的坐标运算问题.

【例5】(2021 •上海卷)在ΔABC中，D为BC中点，E为AD中点，则以下结论：①存在ΔABC，使得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=0$；②存在$\Delta ABC$，使得$\overrightarrow{CE}\,/\!/\,(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$；它们成立的情况是（　　）

（A）①成立；②成立　（B）①成立；②不成立　（C）①不成立；②成立　（D）①不成立；②不成立

解析：垂直、平行关系都容易通过坐标运算来判断，故考虑建系. ΔABC形状虽未定，但依然可尝试建系，一般取一条边为x轴，例如将BC放x轴上，BC中点为原点. A位置不确定，故把A的坐标设成变量，

建立如图所示的平面直角坐标系，不妨设$B(-1,0)$，$C(1,0)$，$A(2x,2y)$，$y\neq 0$，则$E(x,y)$，

所以$\overrightarrow{AB}=(-1-2x,-2y)$，$\overrightarrow{CE}=(x-1,y)$，故$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=(-1-2x)(x-1)-2y^2=-2[(x-\frac{1}{4})^2+y^2-\frac{9}{16}]$，

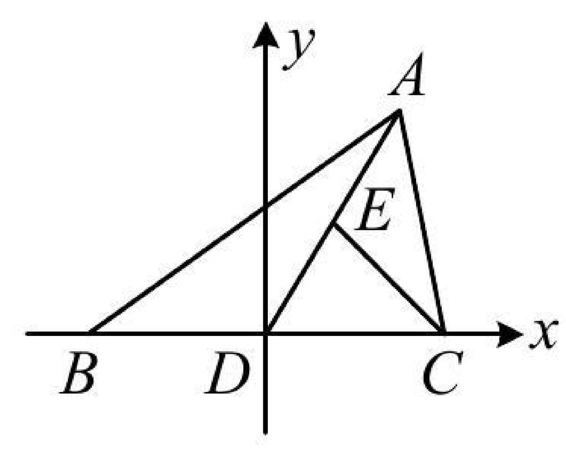
上式可以为0，例如，当$x=\frac{1}{4}$，$y=\frac{3}{4}$时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=0$，故①成立；

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=(-2,0)+(2x-1,2y)=(2x-3,2y)$

若$\overrightarrow{CE}\,/\!/\,(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$，则$(x-1)\cdot 2y=(2x-3)y$，

因为$y\neq 0$，所以约去y可得：$2(x-1)=2x-3$，此方程无解，故②不成立.

答案：B



【反思】即使不是特殊图形，有时也可考虑建系来解决问题；对于未定的图形，把坐标设成变量即可.

类型Ⅲ：向量代数问题中的建系方法

【例6】(2023 •全国甲卷)平面向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$，且$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则$\cos<\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}>=$（　　）

（A）$-\frac{1}{5}$　（B）$-\frac{2}{5}$　（C）$\frac{2}{5}$　（D）$\frac{4}{5}$

解析：涉及三个向量和为零向量，常考虑移项平方，考虑到$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$模相等，是对称的，故移$\boldsymbol{c}$，

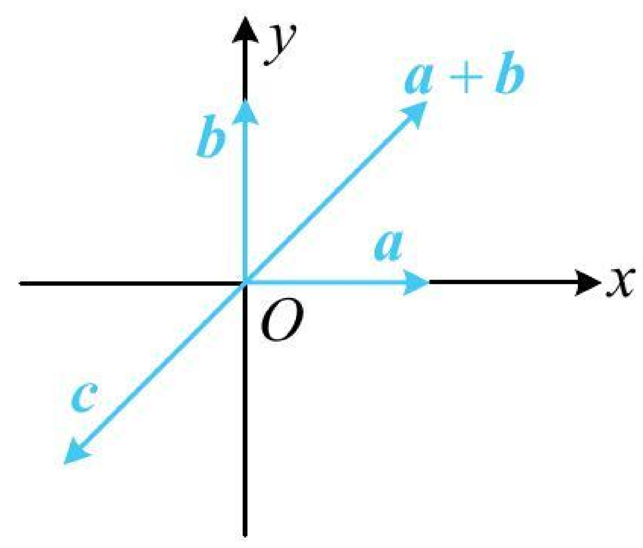
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，所以$\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，故$2=1+1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，故$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，

到此可发现$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的模和夹角均已知，如果搬进坐标系可以很方便地写出坐标，故建系处理，

为了方便，可设 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,1)$，则 $\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(-1,-1)$，故 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(1,2)$，

所以 $\cos<\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}>=\dfrac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|}=\dfrac{2\times1+1\times2}{\sqrt{2^2+1^2}\times\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{4}{5}$.

答案：D



【反思】有时题干没给图形，也可考虑设向量的坐标，把条件翻译为坐标关系，再来解决问题.

【变式】已知单位向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|\le 3$，则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值为_____.

解析：没图直接分析不易，而 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的长度夹角均已知，容易搬进坐标系，故用坐标翻译条件，

设 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$\boldsymbol{c}=(x,y)$，不难验证满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，

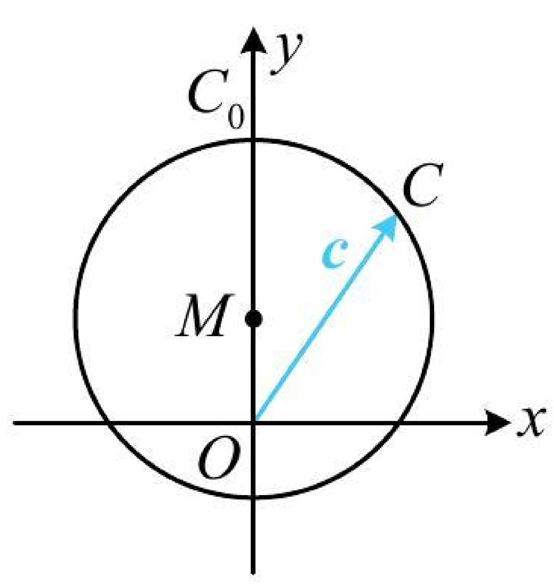
此时 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=(3x,3y-\sqrt{3})$，所以 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|\le 3$ 即为 $\sqrt{9x^2+(3y-\sqrt{3})^2}\le 3$，

化简得：$x^2+(y-\dfrac{\sqrt{3}}{3})^2\le 1$ ①，有了 x，y 的关系，就找到了 $\boldsymbol{c}$ 的终点轨迹，可画图分析 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值，

由①知 $\boldsymbol{c}$ 可以看成从原点 O 出发，指向圆面 $M:x^2+(y-\dfrac{\sqrt{3}}{3})^2\le 1$ 上动点 C 的向量，如图，

因为 $|OM|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值为 $1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，此时点 C 与图中 C_0 重合.

答案：$1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



强化训练

1.（2021•全国乙卷•★）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,4)$，若 $(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $\lambda=$_____.

2.（2023•江西上饶模拟•★）已知向量 $\boldsymbol{a}=(2\sqrt{3},2)$，$\boldsymbol{b}=(0,-2)$，$\boldsymbol{c}=(k,\sqrt{3})$，若 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则 $k=$（　）

（A）4　（B）3　（C）2　（D）1

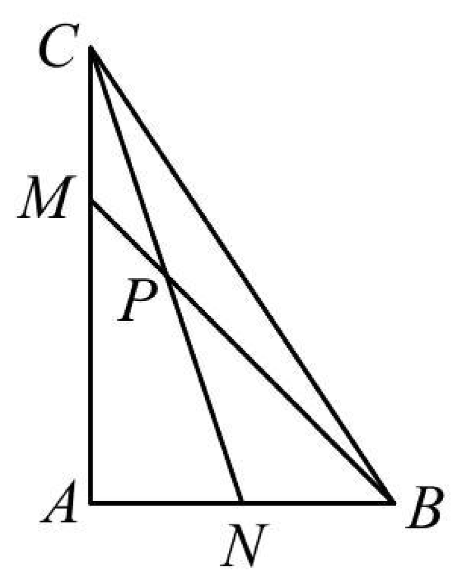
3．（2023 • 新疆乌鲁木齐模拟 • ★）已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，若 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}(mn\neq 0)$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\frac{m}{n}=$（　　）

（A）$-\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）-2　　（D）2

4．（2023 • 安徽芜湖模拟 • ★★）已知向量 $\boldsymbol{a}=(5,-4)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为（　　）

（A）$(4,0)$　　（B）$(5,0)$　　（C）$(-4,0)$　　（D）$(-5,0)$

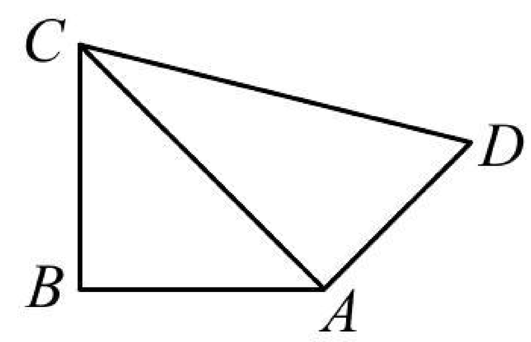
5．（2023 • 四川模拟 • ★★）如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle A=90^{\circ}$，$AB=2$，$AC=3$，$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AN}$，$CN$ 与 BM 交于点 P，则 $\cos\angle BPN$ 的值为_____.



6．（2022 • 上海模拟 • ★★）在 ΔABC 中，$\angle A=90^{\circ}$，$AB=AC=2$，点 M 为边 AB 的中点，点 P 在边 BC 上，则 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{CP}$ 的最小值为_____.

7．（2022・福建模拟・★★）如图，平面四边形 $ABCD$ 中，$AB \perp BC$，$AB = BC$，$AD \perp AC$，$\angle ADC = \dfrac{\pi}{3}$，若 $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$，则 $\dfrac{y}{x} =$（　　）

（A）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）2

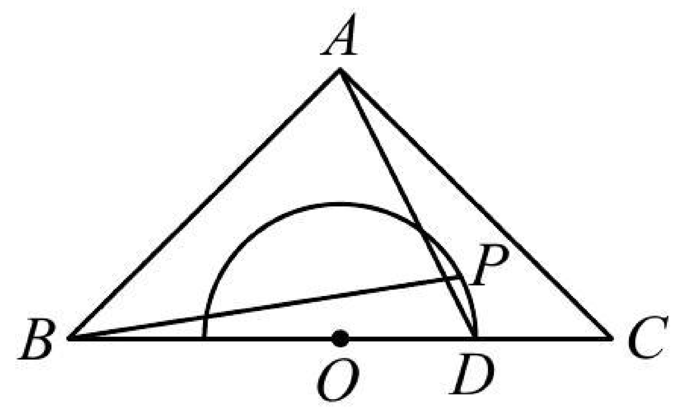


8．（★★★）已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}| = 4$，$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量与 $\boldsymbol{a}$ 反向且长度为 2，则 $|\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}|$ 的最小值为

9．（2022・北京模拟・★★★）已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}| = 1$，$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}> = \dfrac{\pi}{4}$，$(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) = 0$，则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值是（　　）

（A）$\sqrt{2} - 1$　　（B）$\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$　　（D）$\sqrt{2} + 1$

10．（2022・天津模拟・★★★★）如图，直角三角形 ABC 中，$AB = AC$，$BC = 4$，O 为 BC 的中点，以 O 为圆心，1 为半径的半圆与 BC 交于点 D，P 为半圆上任意一点，则 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AD}$ 的最小值为_____.


A
B
O
D
P
C